NASIENRIGLYNE

EKSAMEN	NASIONALE SENIOR SERTIFIKAAT
GRAAD	12
DATUM	NOVEMBER 2024
VAK	WISKUNDE
VRAESTEL	2
PUNTETOTAAL	150
TYDSDUUR (URE)	3
AANTAL BLADSYE	27

SOUTH AFRICAN COMPREHENSIVE ASSESSMENT INSTITUTE

SUID-AFRIKAANSE KOMPREHENSIEWE ASSESSERINGSINSTITUUT

VRAAG 1

Pamela het die hoeveelheid data in MB aangeteken wat sy op elk van die eerste 15 dae in Mei gebruik het opgeteken. Die inligting word in die tabel hieronder getoon:

26	13	3	18	12	34	24	58	16	10	15	69	20	17	40

1.1	Bereken die gemiddeld vir die datastel.	(1)
	$\bar{x} = \frac{375}{15} = 25$	✓ Antwoord (1)
1.2	Bepaal die standaardafwyking vir die datastel.	(1)
	$\sigma = 17{,}65$	✓ Antwoord (1)
1.3	Bepaal die aantal dae waarvoor die data wat gebruik is groter was as een standaardafwyking bo die gemiddeld.	(2)
	$Boonste\ waarde = \bar{x} + \sigma$ $Boonste\ waarde = 25 + 17{,}65$ $Boonste\ waarde = 42{,}65$ ∴ 2 waardes bo een standaardafwyking.	✓ 42,65 ✓ 2 waardes (2)
		[4]

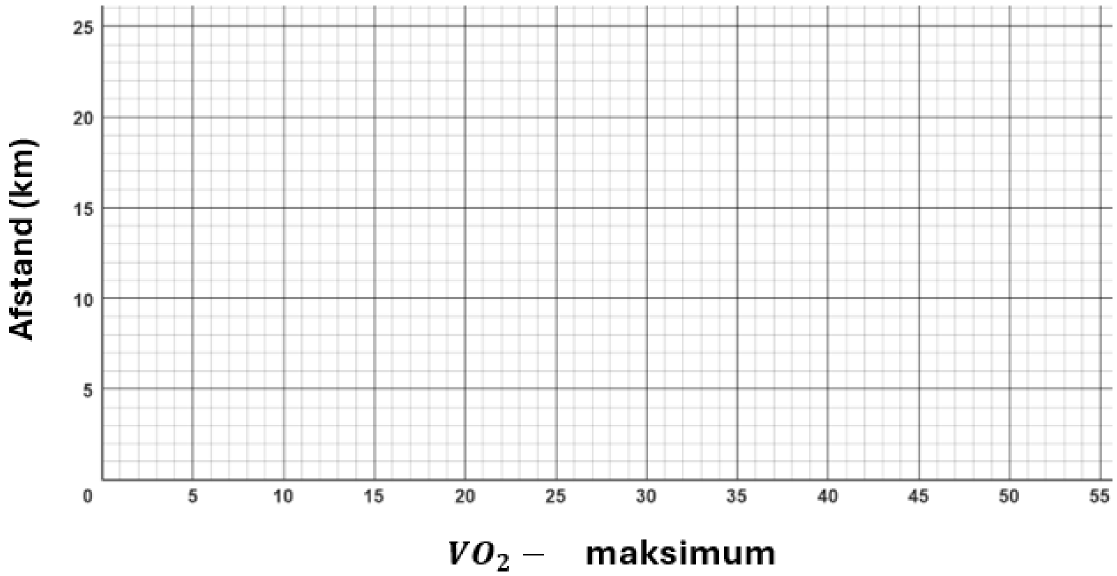
VRAAG 2

'n Atleet se vermoë om suurstof in te neem en te gebruik staan bekend as hul VO_2-maksimum. Die onderstaande tabel toon elf atlete se VO_2 maksimum en die afstand wat hulle in 'n uur gehardloop het.

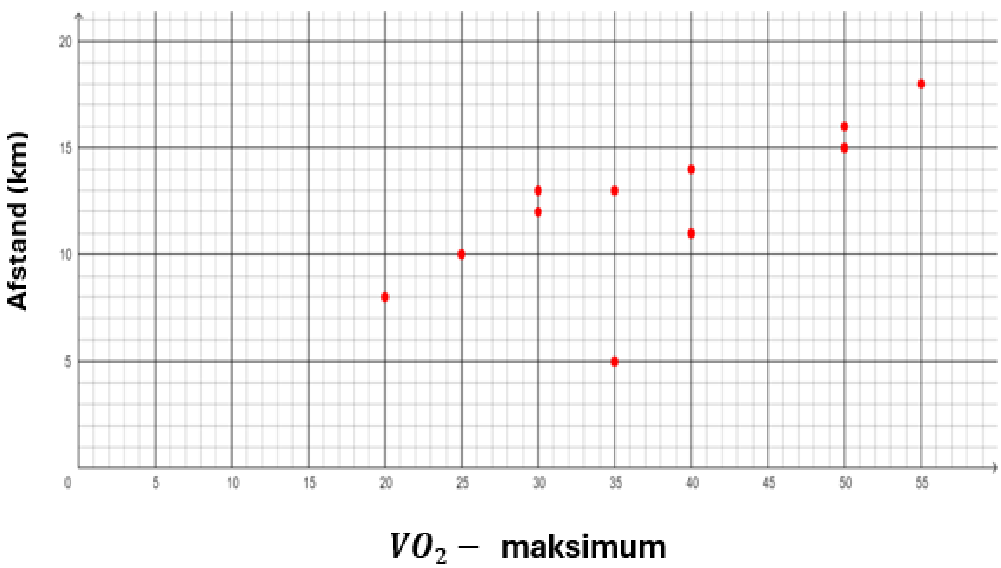
VO_2-max	50	55	20	30	40	25	30	50	40	35	35
Distance (km)	15	18	8	13	14	10	12	16	11	13	5

2.1 Teken 'n verspreidingsdiagram van die bogenoemde data op die onderstaande assestelsel. (2)

Verspreidingsdiagram.

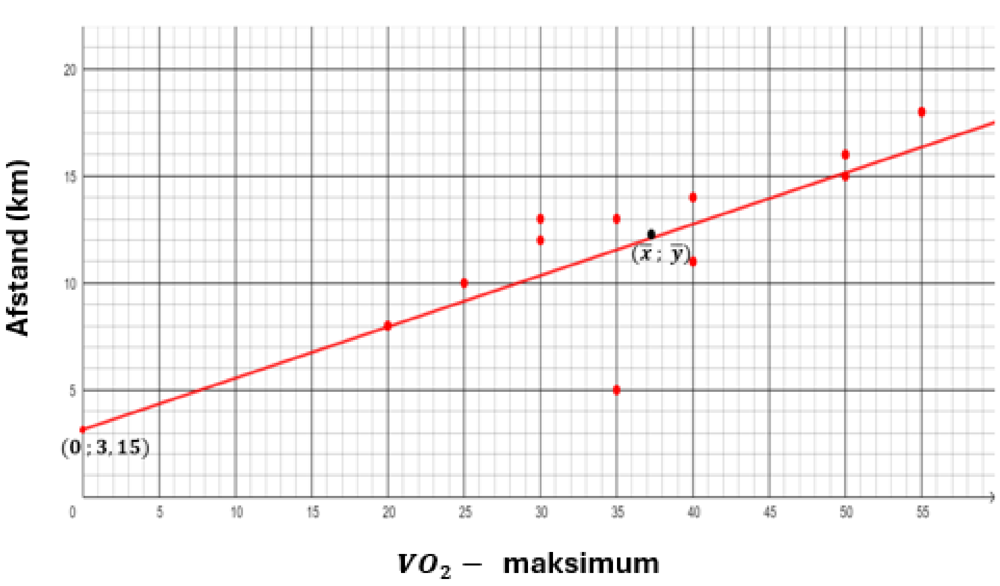


Verspreingsdiagram.



✓ (20;8) en (55;18)
✓ ander punte korrek geplot

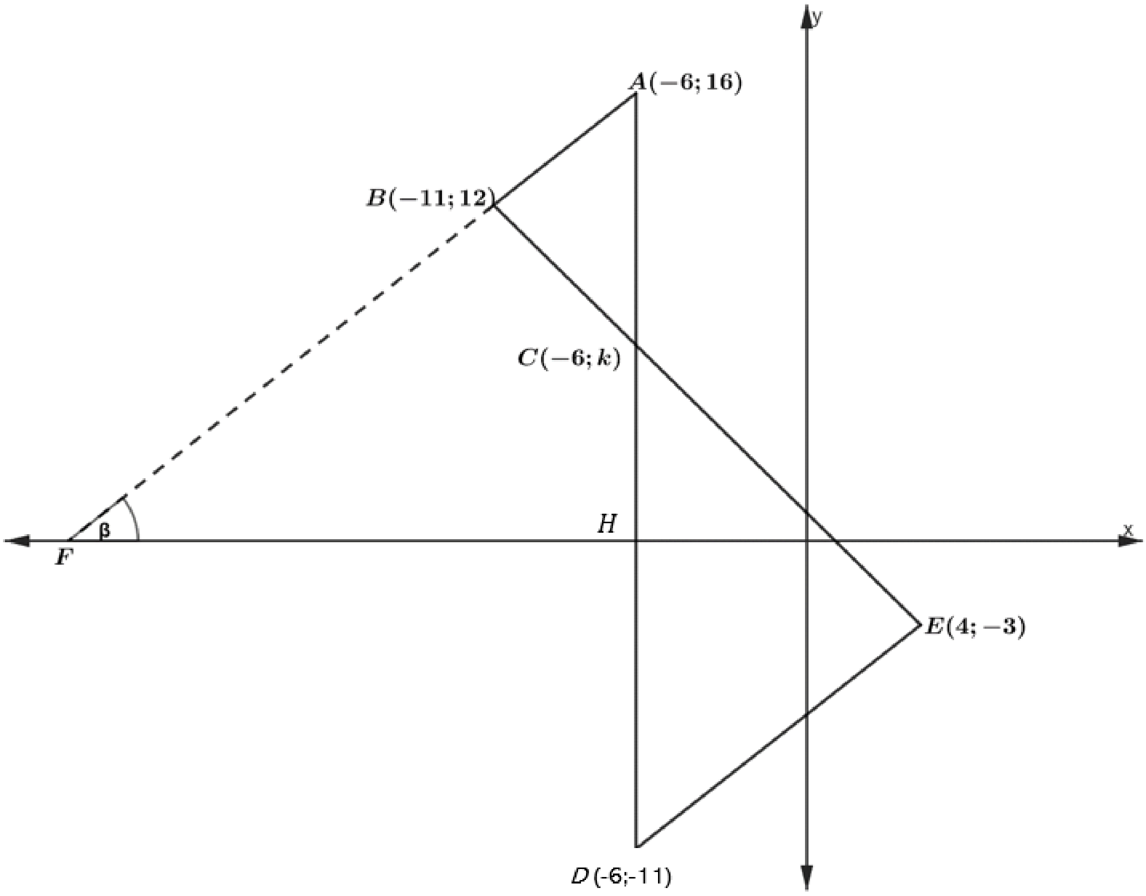
(2)

2.2	Bereken die vergelyking van die kleinste kwadratiese regressielyn van die data.	(3)
	$A = 3{,}15$ $B = 0{,}24$ $y = 0{,}24x + 3{,}15$	✓ $A = 3{,}15$ ✓ $B = 0{,}24$ ✓ Korr. vergelyking (3)
2.3	Teken die kleinste kwadratiese regressielyn op die verspreidingsdiagram wat in **VRAAG 2.1** hierbo geteken is.	(3)
	Verspreingsdiagram.  	✓ y-afsnit ✓ EEN waarde (37,27 ; 12,27) OF (20;8) OF (55;16,4 ✓ Korrekte lyn (3)
2.4	Identifiseer of daar enige uitskieters in die data is. Verskaf 'n rede vir jou antwoord.	(2)
	(35;5) is 'n uitskieter. Hierdie waarde wyk af van al die ander data in hierdie stel.	✓ (35;5) ✓ Rede
2.5	Voorspel die VO_2 maksimum van 'n atleet wat 19 km gehardloop het.	(2)
	$19 = 0{,}24x + 3.15$ $x = 66{,}04$	✓ Vervang $y = 19$ ✓ $x = 66{,}04$ (2)
2.6	Bepaal die korrelasiekoëffisiënt van die data en lewer kommentaar op die korrelasie.	(2)
	$r = 0{,}73$ Matige positiewe korrelasie	✓ r=0,73 ✓ Matige positiewe (2)
		[14]

VRAAG 3

In die onderstaande diagram:

- $A(-6;16); B(-11;12); D(-6;-11)$ en $E(4;-3)$ word gegee.
- AD sny BE by punt $C(-6;k)$.
- AB verleng ontmoet die x-as by F.
- $H\hat{F}A = \beta$.
- AD sny die x-as by H.
- ACD en BCE is reguit lyne.



3.1	Toon aan dat $k = 7$ is.	(4)
	$m_{BE} = \dfrac{12-(-3)}{-11-4}$ $m_{BE} = -1$ $\therefore m_{BC} = \dfrac{12-k}{-11-(-6)}$ $m_{BC} = -1$ $12 - k = 5$ $k = 7$	✓ Vervang in korr. formule ✓ $m_{BE} = -1$ ✓ Vervang (-6;k) ✓ Vereenvoudig

	OF $m_{BE} = \frac{12-(-3)}{-11-4}$ $m_{BE} = -1$ $y = mx + c$ or $y - y_1 = m(x - x_1)$ $-3 = -(4) + c$ $(y-(-3)) = -(x-4)$ $c = 1$ $y + 3 = -x + 4$ $\therefore y = -x + 1$ $y = -x + 1$ $C(-6;k)$: $k = -(-6) + 1 = 7$ **OF** $DE = \sqrt{(4-(-6))^2 + (-3-(-11))^2}$ $DE = \sqrt{164}$ $DE = 2\sqrt{41}$ eenhede $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{ED}$. . . lyn || een sy van △ $\frac{16-k}{k-(-11)} = \frac{\cancel{\sqrt{41}}}{2\cancel{\sqrt{41}}} = \frac{1}{2}$ $2(16-k) = k + 11$ $3k = 21$ $k = 7$	**OF** ✓ Vervang in korr. formule ✓ $m_{BC} = -1$ ✓ $y = -x + 1$ ✓ Vervang (-6;k) **OF** ✓ Vervang in korr. formule ✓ CE=$2\sqrt{41}$ ✓$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{ED}$ ✓ $\frac{16-k}{k-(-11)} = \frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{41}}$
3.2	Bereken die lengte van BC.	(2)
	$BC^2 = (12-7)^2 + (-11+6)^2$ $BC = 5\sqrt{2}$	✓ Vervang in korr. formule ✓ Antwoord

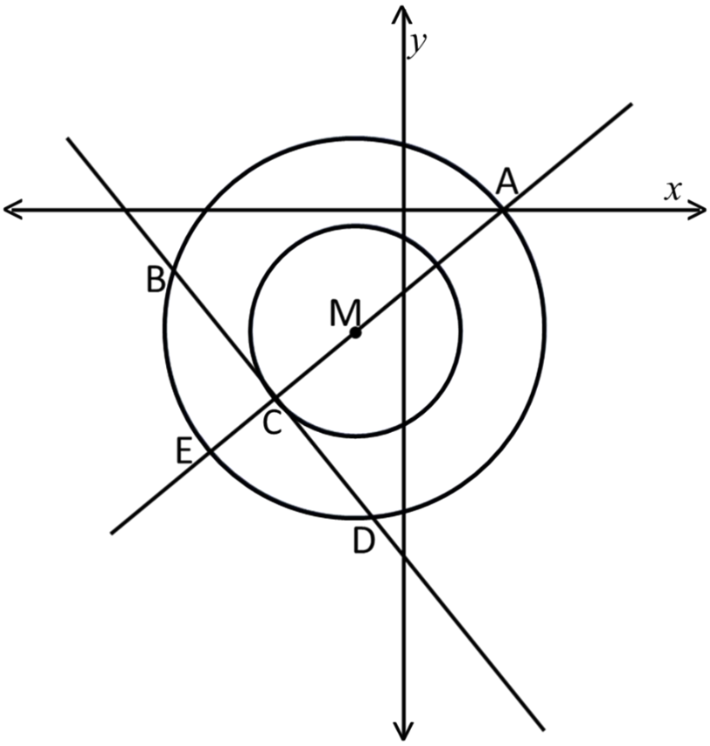
3.3	Toon aan dat C **NIE** die middelpunt van BE is nie.	(2)
	$Middelpunt\ BE = \left(\frac{-11+4}{2}\ ;\ \frac{12-3}{2}\right)$ $Middelpunt\ BE = \left(-\frac{7}{2}\ ;\ \frac{9}{2}\right)$ C = (-6;7), ∴ is dit NIE die middelpunt van BE nie	✓ Vervang in korr. formule ✓ $\left(-\frac{7}{2}\ ;\ \frac{9}{2}\right)$ (2)
3.4	Bereken die grootte van $B\hat{A}D$.	(5)
	$m_{AB} = \frac{16-12}{-6+11} = \frac{4}{5}$ $\tan B\hat{F}X = m_{AB} = \frac{4}{5}$ $B\hat{F}X = tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 38{,}6598 \ldots \approx 38{,}66°$ $\beta = 180° - 38{,}66° = 141{,}34°$ $B\hat{A}D = 141{,}34 - 90°$ . . . . . buite $\angle$ $van\ \Delta = som\ teenoorst\ binne\ \angle'$e $B\hat{A}D = 51{,}34°$ **OF** $AD \perp x - axis$ m_{AD} is ongedefinieerd $\therefore F\hat{H}A = 90^o$ $m_{AB} = \frac{4}{5}$ vanaf 3.2 $\therefore A\hat{F}H = 38{,}66^o$ $\therefore B\hat{A}D = 180^o - 90^o - 38{,}66^o$ $= 51{,}34^o$	✓ m_{AB} ✓ $\tan B\hat{F}X = \frac{4}{5}$ ✓ $B\hat{F}X = 38{,}66°$ ✓ $\alpha = 141{,}34°$ ✓ $B\hat{A}D = 51{,}34°$ **OF** ✓ $F\hat{H}A = 90^o$ ✓ $m_{AB} = \frac{4}{5}$ ✓ $A\hat{F}H = 38{,}66^o$ ✓ $180^o - 90^o - 38{,}66^o$ ✓ $B\hat{A}D = 51{,}34°$

3.5	Bereken die numeriese waarde van $\frac{Area\ of\ \Delta ABC}{Area\ of\ \Delta DEC}$	(5)
	$AC = 16 - 7 = 9$ eenhede (k-waarde vanaf 3.1) $DC = 7 + 11 = 18$ eenhede $BC = 5\sqrt{2}$ $EC = \sqrt{(-6-4)^2 + (7+3)^2} = 10\sqrt{2}$ $B\hat{C}A = E\hat{C}D$ . . . regoorstaande hoeke $\frac{Area\ \Delta ABC}{Area\ \Delta DEC} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times BC \times AC \times \cancel{\sin B\hat{C}A}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times DC \times CE \times \cancel{\sin D\hat{C}E}}$ $\frac{Area\ \Delta ABC}{Area\ \Delta DEC} = \frac{(5\sqrt{2})(9)}{(18)(10\sqrt{2})}$ $\frac{Area\ \Delta ABC}{Area\ \Delta DEC} = \frac{1}{4}$	✓ DC = 18 ✓ EC=$10\sqrt{2}$ ✓ $B\hat{C}A = E\hat{C}D$ ✓ Oppv reël vervang. ✓ Antwoord
		[18]

VRAAG 4

In die onderstaande diagram:

- Die klein sirkel (P_1) en die groot sirkel (P_2) het dieselfde middelpunt M.
- A en E is punte op sirkel P_2.
- EM sny sirkel P_1 by punt C.
- Die raaklyn BD aan sirkel P_1 sny sirkel P_2 by B en D.
- Die vergelyking van sirkel P_1 word gegee deur $x^2 + 2x + y^2 + 10y + 6 = 0$.
- Die vergelyking van lyn EM is $y = x - 4$.

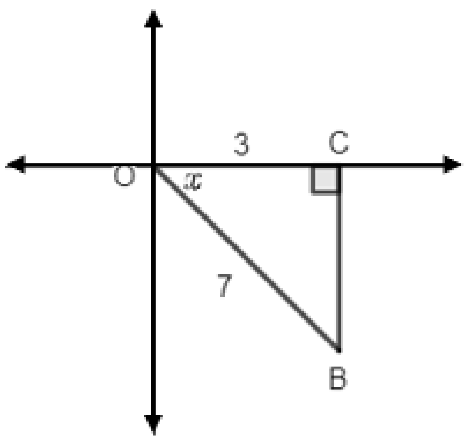


4.1	Gee die koördinate van middelpunt M.	(3)
	$(x+1)^2 + (y+5)^2 = -6 + 1 + 25$ $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 20$ $M\ (-1; -5)$	✓ $(x+1)^2$ ✓ $(y+5)^2$ ✓ (-1;-5)
4.2	Bepaal die radius van sirkel P_1.	(1)
	$r = \sqrt{20}$ (aanvaar $2\sqrt{5}$ or 4,47)	✓ Antwoord

4.3	C is die punt waar lyn EM en sirkel P_1 sny. Bepaal die koördinate van C, korrek tot twee desimale plekke. Toon alle bewerkings.	(6)
	Gegee: $y = x - 4$ $(x+1)^2 + (x-4+5)^2 = 20$ $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 20$ $2x^2 + 4x + 2 - 20 = 0$ $2x^2 + 4x - 18 = 0$ $x^2 + 2x - 9 = 0$ $x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2}$ $x = -1 + \sqrt{10}$ of $x = -1 - \sqrt{10}$ $x = 2{,}16$ n.v.t. $x = -4{,}16$ $y = (-4{,}16) - 4$ $y = -8{,}16$ C(-4,16 ; -8,16)	✓ Vervanging ✓ $2x^2 + 4x - 18 = 0$ ✓ vervang in kwadratiese vergelyk. ✓ $x = -4{,}16$ ✓ n.v.t. $x = 2{,}16$ ✓ C(-4,16 ; -8,16) (y –waarde)
4.4	Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan sirkel P_2 by punt E.	(3)
	$M\hat{C}D = 90°$ . . . radius ⊥ tangent $m_{ME} = 1$ (gegee) $\therefore m_{tangent} = -1$ . . . radius ⊥ tangent **OF** $m_{ME} = \frac{-8{,}16 + 5}{-4{,}16 + 1}$ $m_{ME} = 1$ $m_{BC} \times m_{ME} = -1$ . . . radius ⊥ tangent $\therefore m_{tangent} = -1$	✓ $M\hat{C}D = 90°$ ✓ $m_{ME} = 1$ ✓ Antwoord **OF** ✓ $m_{ME} = 1$ ✓ $m_{BC} \times m_{ME} = -1$ ✓ Antwoord
4.5	Gegewe die feit dat $CD = 5\sqrt{2}$, bepaal MD, die radius van sirkel P_2.	(4)
	$MD^2 = CD^2 + MC^2$ . . . Pythagoras $MD^2 = (5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{20})^2$ $MD = \sqrt{70}$ eenhede	✓ S ✓ $(5\sqrt{2})^2$ ✓ $(\sqrt{20})^2$ ✓ $MD = \sqrt{70}$ Aanvaar 8,37 eenhede

4.6	Skryf die vergelyking van P_2 neer in die vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.	(1)
	$(x+1)^2+(y+5)^2=70$	✓ Antwoord
4.7	Bewys dat punt $q(\sqrt{5}\,;0)$ binne sirkel P_2 lê. Toon al jou bewerkings.	(4)
	Afstand vanaf q na middelpunt: $=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2+(0+5)^2}$ $=5{,}96$ $\sqrt{70}=8{,}37$ $5{,}96<8{,}37\ (\sqrt{70})$ $\therefore q(\sqrt{5};0)$ lê binne sirkel C_2.	✓ korr. vervanging ✓ 5,96 ✓ 8,37 ✓ $5{,}96<8{,}37\ (\sqrt{70})$
		[22]

VRAAG 5

5.1	Indien $7\cos x = 3$ en $x \epsilon [90°\,;360°]$, bereken die waarde van $3\cos 2x$ **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**.	(4)
	$\cos x = \frac{3}{7}$ $3\cos 2x = 3(2\cos^2 x - 1)$ $= 3\left[2\left(\frac{3}{7}\right)^2 - 1\right]$ $= -\frac{93}{49}$ **OF** $\cos x = \frac{3}{7}$ $y = \sqrt{(7)^2 - (3)^2}$ $y = 2\sqrt{10}$ $3\cos 2x = 3(1 - 2\sin^2 x)$ $= 3\left[1 - 2\left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2\right]$ $= -\frac{93}{49}$  **OF** $\cos x = \frac{3}{7}$ $3\cos 2x = 3(\cos^2 x - \sin^2 x)$ $= 3\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2\right]$ $= -\frac{93}{49}$	✓ $\cos x = \frac{3}{7}$ ✓ Identiteit ✓ Vervang korr. verhouding ✓ Antwoord **OF** ✓ $\cos x = \frac{3}{7}$ ✓ Identiteit ✓ Vervang korr. verhouding ✓ Antwoord **OF** ✓ $\cos x = \frac{3}{7}$ ✓ Identiteit ✓ Vervang korr. verhouding ✓ Antwoord (4)

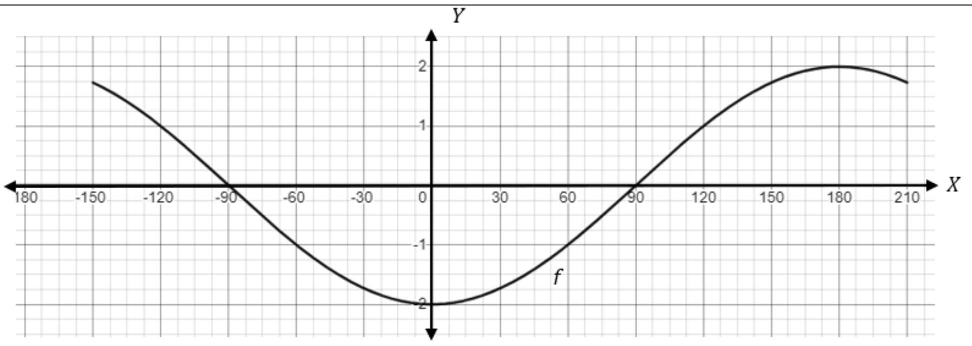
5.2	Bewys dat $2\sin x - \cos^2 x$ geskryf kan word as $(\sin x + 1)^2 - 2$.	(3)
	$(\sin x + 1)^2 - 2$ $= \sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2$ $= 2\sin x - 1 + \sin^2 x$ $= 2\sin x - (1 - \sin^2 x)$ $= 2\sin x - \cos^2 x$ **OF** $2\sin x - \cos^2 x$ $= 2\sin x - (1 - \sin^2 x)$ $= 2\sin x - 1 + \sin^2 x$ $= \sin^2 x + 2\sin x - 1$ $= \sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2$ $= (\sin x + 1)^2 - 2$	✓ kwadratiese drieterm ✓ Vereenvoudig ✓ Identiteit **OF** ✓ Identiteit ✓ kwadratiese drieterm ✓$(+1)\ (-2)$

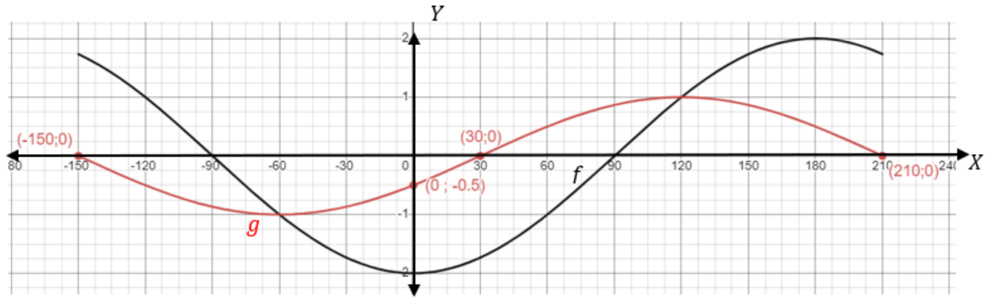
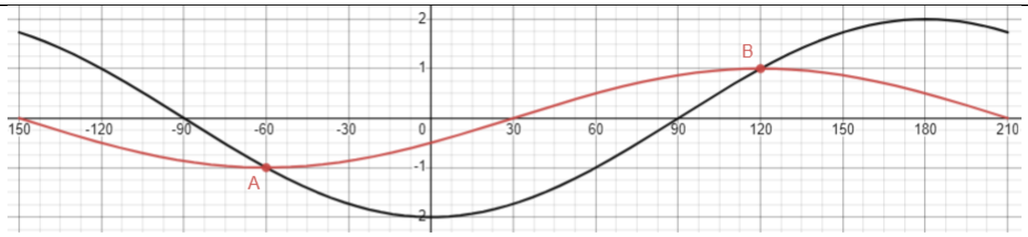
5.3.1	Bepaal die algemene oplossing vir die waarde(s) van x indien: $5\sin 2x - \cos 2x = 0$	(5)
	$\frac{5\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = 0$ $5\tan 2x - 1 = 0$ $\tan 2x = \frac{1}{5}$ VH= 11,31° $2x = 11{,}31° + k \cdot 180°\ ; k\epsilon Z$ $x = 5{,}66° + k \cdot 90°; k\epsilon Z$ $\therefore x = 5{,}66° + k \cdot 90°; k\epsilon Z$ (Aanvaar 5,65)	✓ $\div \cos 2x$ ✓ $\tan 2x = \frac{1}{5}$ ✓ VH=11,31° ✓ 1 punt vir $x = 5{,}66° + k \cdot 90°$ ✓1 punt vir $k \in Z$

5.3.2	Vir watter waarde(s) van x sal $5\tan 2x - 1 = 0$ en $x\epsilon[-180°; 180°]$ ongedefinieerd wees?	(2)
	$x\epsilon\{-135°\,;\,-45°\,;45°\,;135\}$	✓ 1 punt TWEE ✓ 1 punt ANDER TWEE waardes
5.4	Vereenvoudig tot 'n enkele trigonometriese funksie, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**: $$-1 + \cos(180° - \theta).\sin(\theta - 90°)$$	(3)
	$-1 + \cos(180° - \theta).\sin(\theta - 90°)$ $= -1 + (-\cos\theta).(-\cos\theta)$ $= -1 + \cos^2\theta$ $= -(1 - \cos^2\theta)$ $= -\sin^2\theta$	✓ - cos θ ✓ - cos θ ✓ Antwoord
5.5	Indien $\cos 44° = \sqrt{p}$, bepaal $\sin^2 68°$ in terme van p, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.**	(4)
	$\cos(2(22°)) = \sqrt{p}$ $2\cos^2 22° - 1 = \sqrt{p}$ $2\cos^2\,(90° - 68°) - 1 = \sqrt{p}$ $2\sin^2 68° - 1 = \sqrt{p}$ $\sin^2 68° = \dfrac{\sqrt{p}+1}{2}$ **OF** $\cos 136° = 1 - 2\sin^2 68$ $2\sin^2 68° = 1 - \cos 136°$ $= 1 + \cos 44°$ $\sin^2 68° = \frac{\sqrt{p}+1}{2}$	✓ cos (2(22)) ✓ Identiteit ✓ Reduksie (90-68) ✓ Antwoord **OF** ✓ $1 - 2\sin^2 68$ ✓ Vereenvoudig ✓ Skerphoek ✓ Antwoord

5.6	Bewys die volgende identiteit:	
	$\dfrac{\sin 7x \cdot \cos 5x - \cos 7x \cdot \sin 5x}{\tan 2x} - 1 = -2\sin^2 x$	(4)
	$LK = \dfrac{\sin(7x - 5x)}{\tan 2x} - 1$ $LK = \dfrac{\sin 2x}{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}} - 1$ $LK = \sin 2x \times \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} - 1$ $LK = \cos 2x - 1$ $LK = 1 - 2\sin^2 x - 1$ $LK = -2\sin^2 x = RK$	✓ $\sin(7x - 5x)$ ✓ $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ ✓ $\cos 2x - 1$ ✓ $1\text{-}2\sin^2 x$
5.7	Gegee: $\tan x = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \ldots}}}}$ Bewys dat: $\sin x = \sqrt{\cos x(\cos^2 x + \sin x)}$	(5)
	$(\tan x)^2 = \left(\sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \ldots}}}}\right)^2$ $\tan^2 x = \cos x + \tan x$ $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos x + \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\sin^2 x = \cos^3 x + \sin x \cos x$ $\sin^2 x = \cos x(\cos^2 x + \sin x)$ $\sin x = \sqrt{\cos x(\cos^2 x + \sin x)}$	✓ kwadreer beide kante ✓ Vervang $\tan x$ ✓ tan identiteit ✓ KGV ✓ $\sin^2 x = \ldots$
		[30]

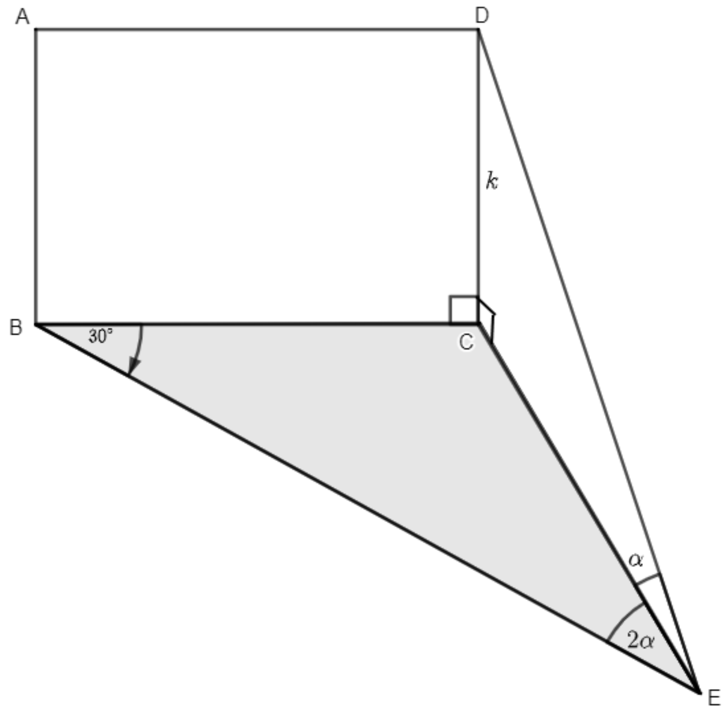
VRAAG 6

6.1	Bereken die waarde(s) van x **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, indien $\sin(x-30°)+2\cos x=0; x\epsilon[-150°;210°]$ en $\cos x\ \neq 0$.	(6)
	$\sin x\cdot\cos 30°-\cos x\cdot\sin 30°+2\cos x=0$ $\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2\cos x=0$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x=0$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{3\cos x}{2\cos x}=\frac{0}{\cos x}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x=-\frac{3}{2}$ $\tan x=-\frac{3}{\sqrt{3}}$ $VH=60°$ $x=180°-60°+k.180°;k\epsilon Z$ OF $x=-60°+k.180°;k\epsilon Z$ $x\epsilon\{-60°\,;120°\}$	✓ saamgestel de id. ✓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ $\frac{1}{2}$ ✓ $\div\cos x$ ✓ $\tan x=-\frac{3}{\sqrt{3}}$ ✓ -60° EN 120°
6.2	Die onderstaande diagram toon die grafiek van $f(x)=-2\cos x$, waar $x\epsilon[-150°;210°]$.	
		

6.2.1	Skets die grafiek van $g(x) = \sin(x - 30°)$ op dieselfde assestelsel hierbo gegee. Toon duidelik alle afsnitte met die asse sowel as die draaipunte.	(4)
		✓ vorm ✓ y- afsnit ✓ Alle x-afsnitte ✓ D/P (-60;-1) en (120;1)
6.2.2	Skryf die amplitude van f neer .	(1)
	Amplitude = 2	✓ Antwoord
6.3	Gebruik jou grafieke om die waarde(s) van x, in the interval $x\epsilon[-150°; 210°]$ sodanig dat:	
6.3.1	$g(x) - f(x) = 0$.	(2)
	By $-60^o,\ g(x) - f(x) = -1 - (-1) = 0$ By$120^o,\ g(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$ $x\epsilon\{-60°\ ; 120°\}$ OF $x = -60°\ \ or\ \ x = 120°$	✓ $-60°$ ✓ $120°$
6.3.2	Dui, met behulp van die simbole A en B, jou antwoord op VRAAG 6.3.1 op die grafiek geteken in VRAAG 6.2.1 aan.	(1)
		✓ Antwoord
		[14]

VRAAG 7

In die diagram lê B, C en E in dieselfde horisontale vlak. ABCD is 'n reghoekige kartonstuk en CDE is 'n driehoekige kartonstuk met 'n regte hoek by C, en $DC = k$. Die kartonstukke word loodreg op die horisontale vlak geplaas soos in die diagram getoon.
Die hoogtehoek van E na D is α. $C\hat{E}B = 2\alpha$ en $E\hat{B}C = 30°$.



7.1	Skryf CE in terme van k en α.	(2)
	$\frac{k}{CE} = \tan\alpha$ $CE = \frac{k}{\tan\alpha}$ **OF** $\frac{CE}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{k}{\sin\alpha}$ $CE = \frac{k\cos\alpha}{\sin\alpha}$	✓ tan verhouding ✓ Antwoord **OF** ✓ sin rule ✓ Antwoord

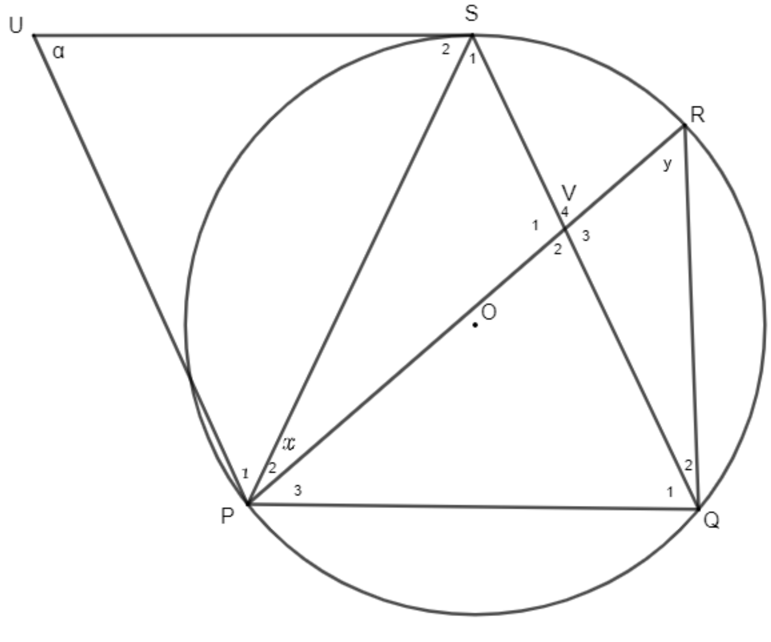
7.2	Bewys dat $BC = 4\,k\ \cos^2\alpha$	(4)
	$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{CE}{\sin 30^\circ}$ $BC = \frac{\frac{k}{\tan\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{2}}$ $BC = \frac{4k\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ $BC = 4k\cos^2\alpha$	✓ Sin reël ✓ dubbelhoek identiteit ✓ $\frac{1}{2}$ ✓ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

7.3	Toon aan dat die oppervlakte van △BCE gelyk is aan : $$\frac{\mathbf{2k^2\cos^3\alpha\,.\sin(30^\circ+2\alpha)}}{\mathbf{\sin\alpha}}$$	(3)
	$Oppv\ \Delta BCE = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot EC\cdot\sin\,(180^\circ-(30^\circ+2\alpha))$ $Oppv\ \Delta BCE = \frac{1}{2}\cdot(4k\cos^2\alpha)\left(\frac{k}{\tan\alpha}\right)(\sin(30^\circ+2\alpha))$ $Oppv\ \Delta BCE = \frac{2k^2\cos^2\alpha\,.\sin(30^\circ+2\alpha)}{\tan\alpha}$ $Oppv\ \Delta BCE = \frac{2k^2\cos^2\alpha\,.\sin(30^\circ+2\alpha)}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ $Oppv\ \Delta BCE = \frac{2k^2\cos^2\alpha\,.\sin(30^\circ+2\alpha)}{1}\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $Oppv\ \Delta BCE = \frac{2k^2\cos^3\alpha\,.\sin(30^\circ+2\alpha)}{\sin\alpha}$	✓ Opp reël ✓ Vereenvoudig ✓ tan $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
		[9]

VRAAG 8

In die diagram:

- O is die middelpunt van die sirkel.
- Die sirkel gaan deur P, Q, R, en S.
- SQ en PR sny in V.
- SU is 'n raaklyn aan die sirkel by S.
- UP word getrek.
- $\hat{U} = \alpha$.
- $\hat{R} = y$.
- $\hat{P}_2 = x$.
- $\alpha = x + y$.



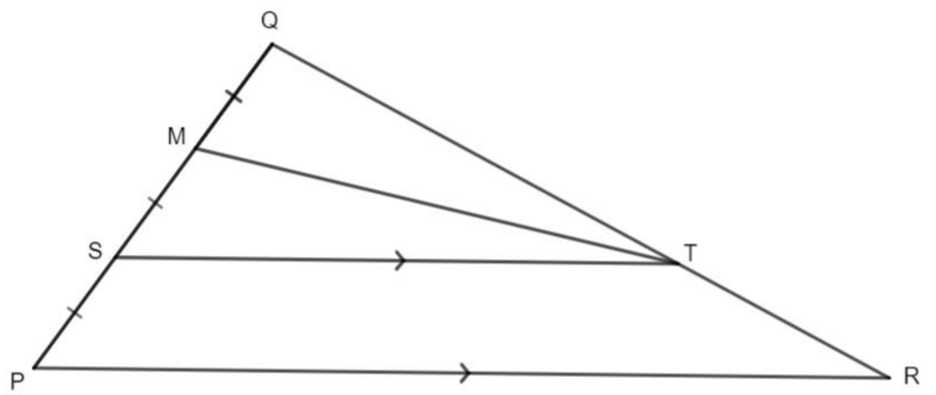
8.1	Gee, met 'n rede, die grootte van:	(2)
8.1.1	$\hat{Q}_2$	
	$\hat{Q}_2 = x$ . . . ∠'e in dieselfde sirkelsegment	✓ S ✓ R

8.1.2	$\hat{S}_1$	(1)
	$\hat{S}_1 = y$ . . . ∠'e in dieselfde sirkelsegment	✓ S & R
8.2	Bewys dat VSUP 'n koordevierhoek is.	(3)
	$\hat{V}_2 = x + y$ . . . Buite ∠ △SPV = som teenoorst binne∠'e $\hat{U} = \alpha = x + y$ . . . gegee $\therefore\ \hat{V}_2 = \hat{U}$ ∴ VSUP is KVH . . . Omgekeerde buite ∠ = teenoorst binne∠ **OF** $\hat{V}_2 = x + y$ . . . Buite ∠ △SPV = som teenoorst binne∠'e $\hat{V}_1 = 180° - (x + y)$ . . . ∠'e op reguit lyn $\hat{V}_1 + \hat{V}_2 = 180° - (x + y) + (x + y)$ $\hat{V}_1 + \hat{V}_2 = 180°$ ∴ VSUP is KVH . . . Omgekeerde teenoorst binne ∠'e supplementêr	✓ S & R ✓ S ✓ R **OF** ✓ S & R ✓ S ✓ R
8.3	Indien $PQ = QR$, bewys dat PQ 'n raaklyn aan die sirkel deur V, S, U en P is.	(3)
	$\hat{P}_3 = y$ . . . ∠'e teenoor = sye $\therefore \hat{S}_1 = \hat{P}_3 = y$ PQ is 'n raaklyn . . . omgekeerde raaklyn-koord stelling	✓ S & R ✓ S ✓ R
		[9]

VRAAG 9

In die diagram word △PQR getrek met S en T punte op PQ en QR onderskeidelik.

- M is 'n punt op QS.
- ST ∥ PR
- PS = SM = MQ



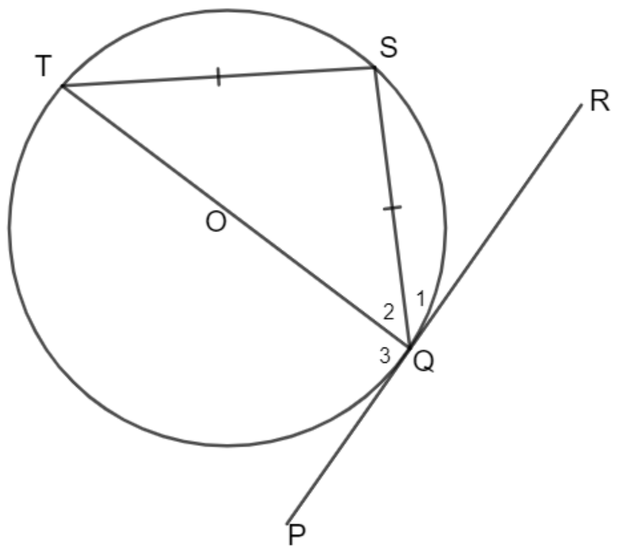
9.1	Stel $SP = k$. Bereken $\frac{TR}{QT}$.	(2)
	$\frac{TR}{QT} = \frac{SP}{QS}$. . . . lyn ewewydig aan een sy van △ $\frac{TR}{QT} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$	✓ S&R ✓Antwoord
9.2	Bepaal die numeriese waarde van $\frac{Area\ of\ \Delta QMT}{Area\ of\ \Delta QPR}$.	(4)
	$\frac{Oppv\ van\ \Delta QMT}{Oppv\ van\ \Delta QPR} = \frac{\frac{1}{2}\ QM \cdot QT \sin Q}{\frac{1}{2}\ QP \cdot QR \sin Q}$ $\frac{Oppv\ van\ \Delta QMT}{Oppv\ van\ \Delta QPR} = \frac{\frac{1}{2}\ (k)(2m) \sin Q}{\frac{1}{2}\ (3k)(3m) \sin Q}$ $\frac{Oppv\ van\ \Delta QMT}{Oppv\ van\ \Delta QPR} = \frac{2}{9}$	✓ Oppv reël ✓ ½(k)(2m) sinQ ✓ ½(3k)(3m) sinQ ✓ Antwoord

9.3	Indien ST = 22 cm, bepaal die lengte van PR.	(4)
	In △PQR en △SQT: $\hat{Q} = \hat{Q}$ . . . gemene hoek $Q\hat{P}R = Q\hat{S}T$ . . . ooreenkomst. ∠'e ; ST‖PR $Q\hat{R}P = Q\hat{T}S$ . . . ooreenkomst. ∠'s ; ST‖PR **OF** Som binne.∠'e van △ $\triangle PQR \parallel\mid \triangle SQT$ . . . H;H;H $\therefore \frac{PR}{ST} = \frac{PQ}{SQ}$ . . . $\triangle PQR \parallel\mid \triangle SQT$ $\frac{PR}{22} = \frac{3k}{2k}$ $PR = 33\ cm$	✓ gemene ✓ ooreenst ∠ST‖PR ✓ S&R ||| ✓ Antwoord
		[10]

VRAAG 10

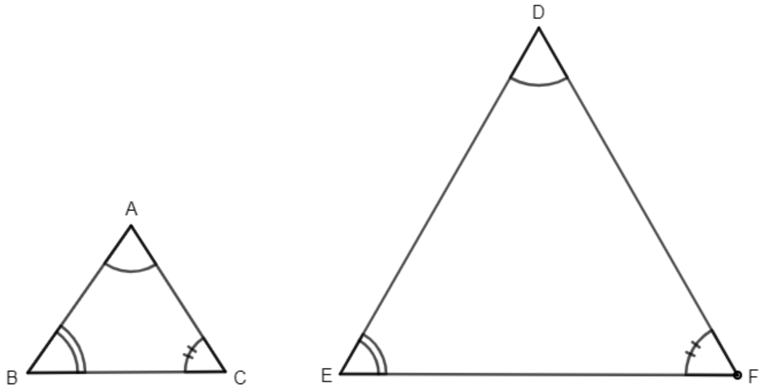
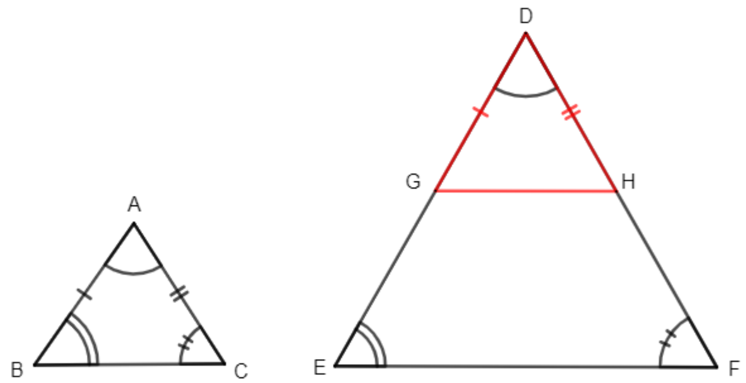
In die diagram:

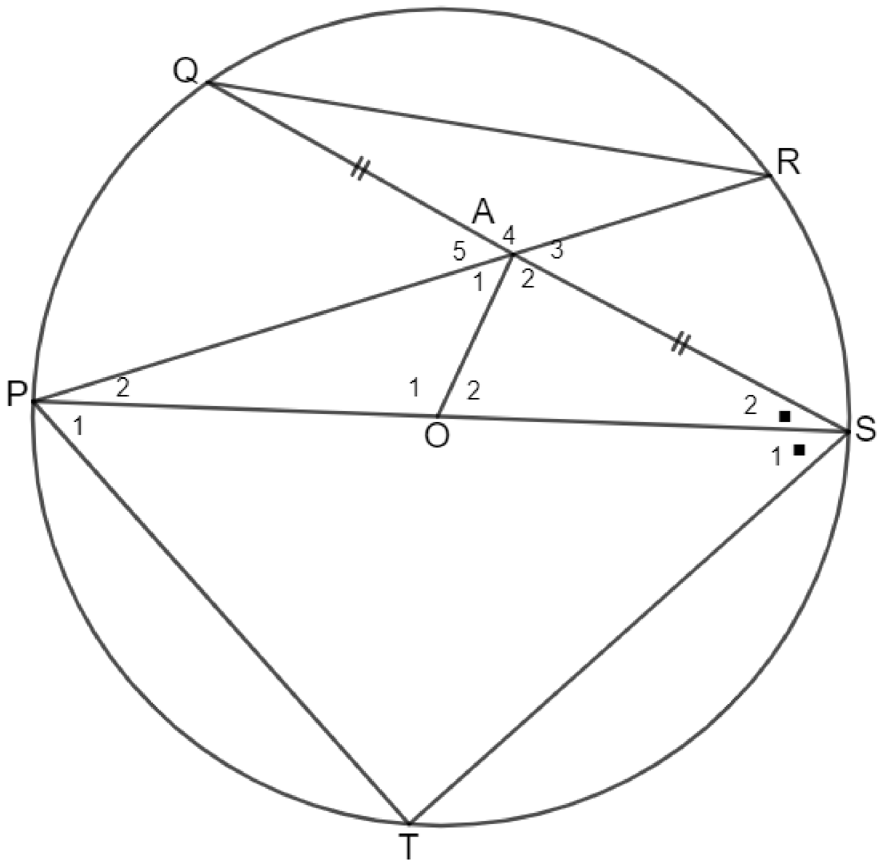
- TOQ is ’n middellyn van die sirkel met middelpunt O.
- T, S en Q lê op die omtrek van die sirkel.
- PR is ’n raaklyn aan die sirkel by Q.
- TS = SQ.



Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{Q}_1$.	(4)
$\hat{Q}_2 = \hat{T}$ . . . ∠’e teenoor = sye	✓ S & R
$\hat{T} = \hat{Q}_1$ . . . raaklyn-koord	✓ S & R
$\therefore\ \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$	
$\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 = 90°$ . . . radius ⊥ raaklyn	✓ S & R
$Q_1 = 45°$	✓ Antwoord
OF	**OF**
$\hat{S} = 90°$ . . . ∠ in semi-sirkel	✓ S & R
$\hat{Q}_2 = \hat{T}$ . . . ∠’s teenoor = kante	✓ S & R
$\hat{Q}_2 = 45°$	
$\hat{T} = \hat{Q}_1$ . . . raaklynkoord	✓ S & R
$\therefore\ \hat{Q}_1 = 45°$	✓ Antwoord
	[4]

VRAAG 11

11.1	In die diagram word ΔABC en ΔDEF gegee met $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ en $\hat{C} = \hat{F}$. Gebruik die diagram om te bewys dat $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{EF}$.	(6)
		
		
	Konstruksie: Trek GH sodat AB=DG en AC=DH. In ΔABC en △DGH: AB = DG Konstruksie AC = DH Konstruksie $\hat{A} = \hat{D}$ Gegee ∴ ΔABC ≡ △DGH S;H;S In △DEF: $D\hat{G}H = \hat{B}$ ΔABC ≡ △DGH Maar $\hat{B} = \hat{E}$ Gegee $D\hat{G}H = \hat{E}$ ∴ $GH \parallel EF$ Ooreenkomstige hoeke gelyk $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$ Lyn ewewydig aan een sy van △ Maar DG = AB En DH = AC Konstruksie ∴ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	✓ Konstruksie ✓ ΔABC ≡ △DGH ✓S;H;S ✓ $D\hat{G}H = \hat{E}$ ✓ $GH \parallel EF$ & R ✓ R

11.2	In die diagram: • POS is die middellyn van die sirkel met middelpunt O. • QAS en PAR is reguit lyne. • P, Q, R, S en T lê op die omtrek van die sirkel. • $QA = AS$. • $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$. • SA verleng ontmoet die sirkel by Q. • QR, PT en ST word getrek.	
		
11.2.1	Skryf, met 'n rede die grootte van $\hat{T}$ neer.	(2)
	$\hat{T} = 90°$ . . . ∠ in semi-sirkel.	✓ 90° ✓ R

11.2.2	Bewys dat △PTS ||| △OAS.	(4)
	$\hat{A}_2 = 90°$ . . . lyn vanaf middelpunt van sirkel na middelpunt van koord is ⊥ op koord. In △PTS en △OAS: $\hat{T} = \hat{A}_2 = 90°$ . . . bewys $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$ . . . gegee $\therefore \hat{P}_1 = \hat{O}_2$ . . . binne ∠'e △'e ∴ △PTS ||| △OAS . . . H;H;H	✓ S&R ✓ S&R ✓ S&R ✓ R
11.2.3	Bewys dat $\mathrm{TS.OP} = \mathrm{QA.PS}$	(4)
	$\frac{TS}{AS} = \frac{PS}{OS}$ . . . $\Delta PTS\ \|\|\|\Delta OAS$ Maar QA = AS . . . gegee En OS = OP . . . radii $\therefore \frac{TS}{QA} = \frac{PS}{OP}$ $\therefore TS\,.OP = QA\,.PS$	✓ S & R ✓ S ✓ S & R ✓ Verhouding (4)
		[16]
		GROOTTOTAAL: [150]