EKSAMEN	NASIONALE SENIOR SERTIFIKAAT
GRAAD	12
DATUM	NOVEMBER 2024
VAK	WISKUNDE
VRAESTEL	2
PUNTETOTAAL	150
TYDSDUUR (URE)	3
AANTAL BLADSYE	31

SOUTH AFRICAN COMPREHENSIVE ASSESSMENT INSTITUTE

SUID-AFRIKAANSE KOMPREHENSIEWE ASSESSERINGSINSTITUUT

INSTRUKSIES

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat die vrae beantwoord word.

1. Hierdie vraestel bestaan uit 10 vrae. Beantwoord al die vrae.
2. Toon duidelik ALLE berekeninge, diagramme, grafieke ens. wat jy gebruik het om jou antwoorde te bepaal.
3. Slegs antwoorde sal nie noodwendig met volpunte beloon word nie.
4. Jy mag 'n goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar (nie-programmeerbaar en nie-grafies) gebruik, tensy anders vermeld.
5. Indien nodig, rond antwoorde af tot TWEE desimale plekke, tensy anders vermeld.
6. Diagramme is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
7. 'n Inligtingsblad met formules is aan die einde van die vraestel ingesluit.
8. Skryf netjies en leesbaar.
9. Beantwoord al die vrae **op die eksamenvraestel** op die reëls wat na elke vraag verskaf word.
10. Bykomende skryfspasie word aan die einde van die vraestel voorsien. Dui duidelik aan of jy die bykomende skryfspasie gebruik om 'n vraag te voltooi.

VRAAG 1

Pamela het die hoeveelheid data in MB aangeteken wat sy op elk van die eerste 15 dae in Mei gebruik het. Die inligting word in die tabel hieronder getoon:

26	13	3	18	12	34	24	58	16	10	15	69	20	17	40

1.1 Bereken die gemiddeld vir die datastel. (1)

1.2 Bepaal die standaardafwyking vir die datastel. (1)

1.3 Bepaal die aantal dae waarvoor die data wat gebruik is groter was as een standaardafwyking bo die gemiddeld. (2)

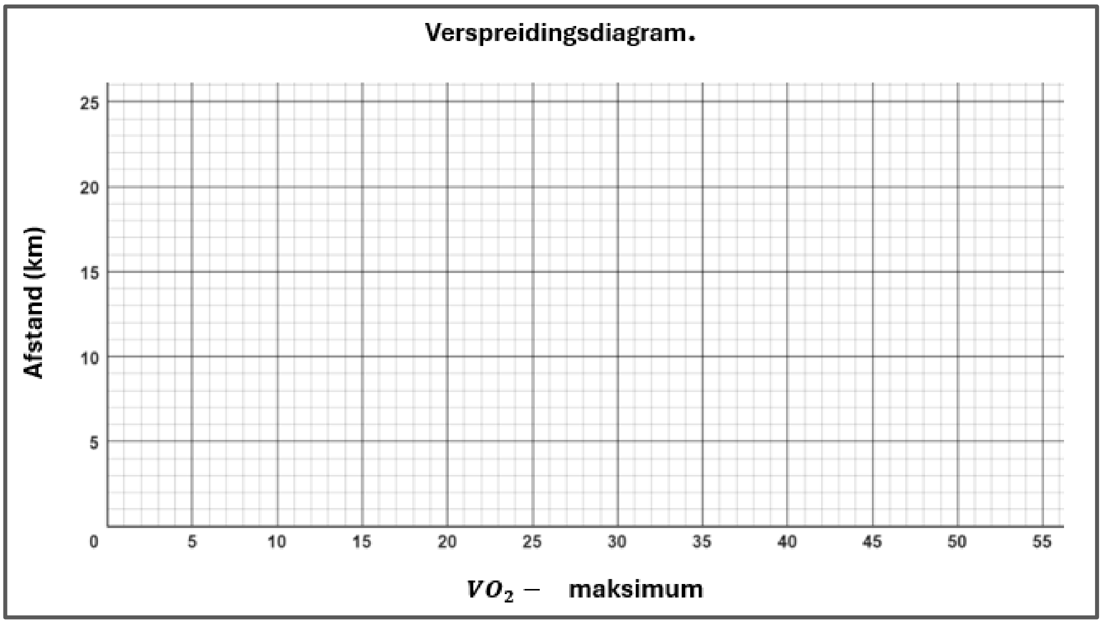
[4]

VRAAG 2

'n Atleet se vermoë om suurstof in te neem en te gebruik staan bekend as hul VO_2-maksimum. Die onderstaande tabel toon elf atlete se VO_2 maksimum en die afstand wat hulle in 'n uur gehardloop het.

VO_2-max	50	55	20	30	40	25	30	50	40	35	35
Distance (km)	15	18	8	13	14	10	12	16	11	13	5

2.1 Teken 'n verspreidingsdiagram van die bogenoemde data op die onderstaande assestelsel. (2)



2.2 Bereken die vergelyking van die kleinste kwadratiese regressielyn van die data. (3)

____

____

____

____

2.3 Teken die kleinste kwadratiese regressielyn op die verspreidingsdiagram wat in **VRAAG 2.1** hierbo geteken is. (3)

2.4 Identifiseer of daar enige uitskieters in die data is. Verskaf ’n rede vir jou antwoord. (2)

2.5 Voorspel die VO_2 maksimum van ’n atleet wat 19 km gehardloop het. (2)

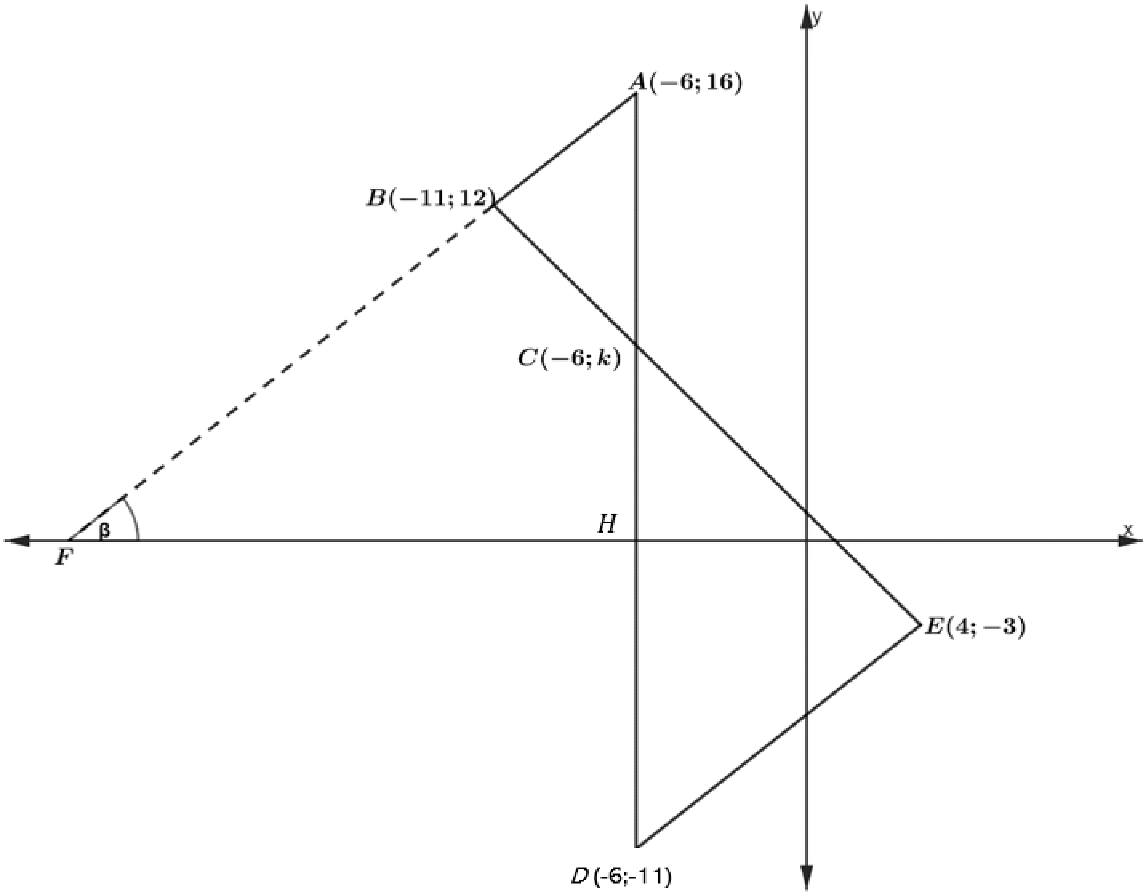
2.6 Bepaal die korrelasiekoëffisiënt van die data en lewer kommentaar op die korrelasie. (2)

[14]

VRAAG 3

In die onderstaande diagram:

- $A(-6;16);B(-11;12);D(-6;-11)$ en $E(4;-3)$ word gegee.
- AD sny BE by punt $C(-6;k)$.
- AB verleng ontmoet die x-as by F.
- $H\hat{F}A=\beta$.
- AD sny die x-as by H.
- ACD en BCE is reguit lyne.



3.1 Toon aan dat $k=7$ is. (4)

3.2 Bereken die lengte van BC. (2)

3.3 Toon aan dat C **NIE** die middelpunt van BE is nie. (2)

3.4 Bereken die grootte van $B\hat{A}D$. (5)

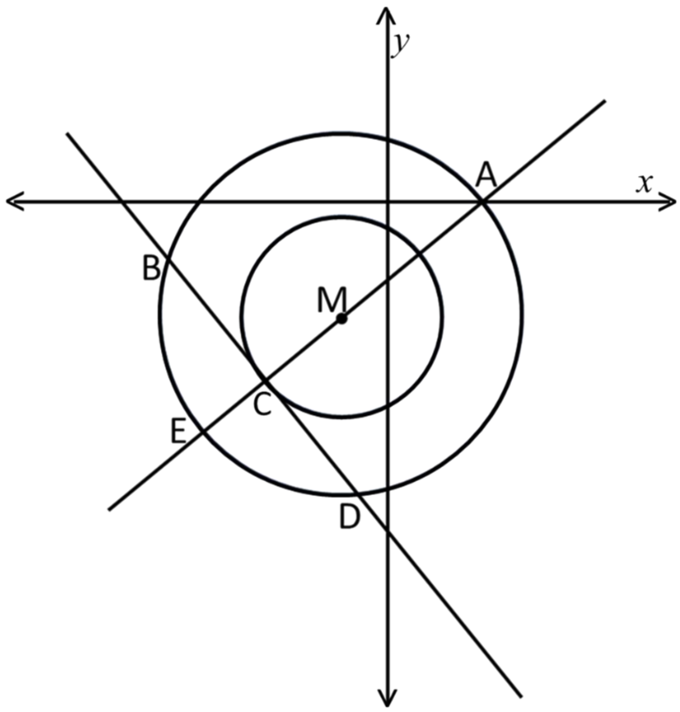
3.5 Bereken die numeriese waarde van $\frac{Area\ van\ \Delta ABC}{Area\ van\ \Delta DEC}$ (5)

[18]

VRAAG 4

In die onderstaande diagram:

- Die klein sirkel (P_1) en die groot sirkel (P_2) het dieselfde middelpunt M.
- A en E is punte op sirkel P_2.
- EM sny sirkel P_1 by punt C..
- Die raaklyn BD aan sirkel P_1 sny sirkel P_2 by B en D.
- Die vergelyking van sirkel P_1 word gegee deur $x^2 + 2x + y^2 + 10y + 6 = 0$.
- Die vergelyking van lyn EM is $y = x - 4$.



4.1 Gee die koördinate van middelpunt M. (3)

4.2 Bepaal die radius van sirkel P_1. (1)

4.3 C is die punt waar lyn EM en sirkel P_1 sny. Bepaal die koördinate van C, korrek tot twee desimale plekke. Toon alle bewerkings. (6)

4.4 Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan sirkel P_2 by punt E. (3)

4.5 Bepaal MD, 'n radius van sirkel P_2. (4)

4.6 Skryf die vergelyking van P_2 neer in die vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. (1)

4.7 Bewys dat punt $q(\sqrt{5}\,;0)$ binne sirkel P_2 lê. Toon al jou bewerkings. (4)

[22]

VRAAG 5

5.1 Indien $7\cos x = 3$ en $x \epsilon [90°\,;360°]$, bereken die waarde van $3\cos 2x$ **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**. (4)

5.2 Bewys dat $2\sin x - \cos^2 x$ geskryf kan word as $(\sin x + 1)^2 - 2$. (3)

5.3

5.3.1 Bepaal die algemene oplossing vir die waarde(s) van x indien:

$$5\sin 2x - \cos 2x = 0$$ (5)

5.3.2 Vir watter waarde(s) van x sal $5\tan 2x - 1 = 0$ waar $x \epsilon [-180°; 180°]$ ongedefinieerd wees? (2)

5.4 Vereenvoudig tot 'n enkele trigonometriese funksie, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**:

$$-1+\cos(180°-\theta).\sin(\theta-90°)$$ (3)

5.5 Indien $\cos 44° = \sqrt{p}$, bepaal $\sin^2 68°$ in terme van p, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.** (4)

5.6 Bewys die volgende identiteit:

$$\frac{\sin 7x \cdot \cos 5x - \cos 7x \cdot \sin 5x}{\tan 2x} - 1 = -2\sin^2 x$$

(4)

5.7 Gegee: $\tan x = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + ...}}}}$

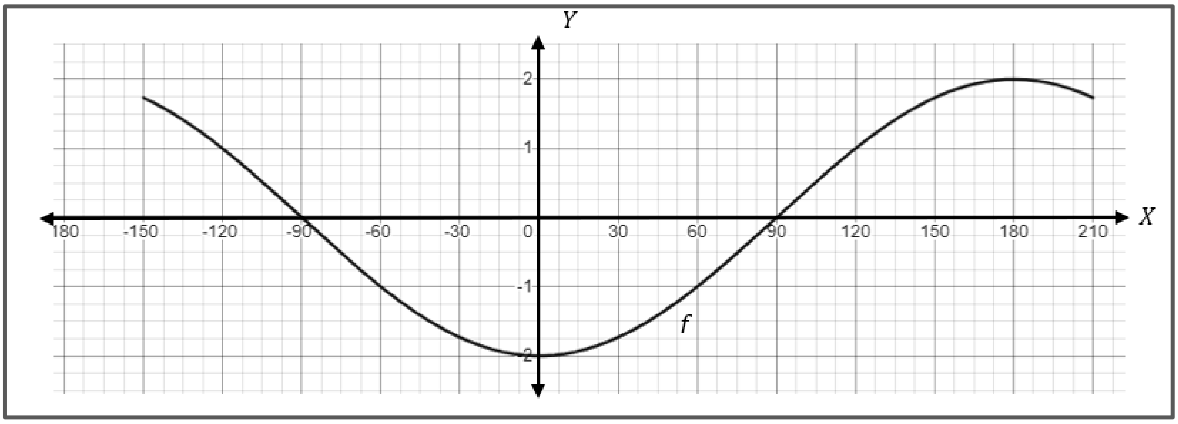
Bewys dat: $\sin x = \sqrt{\cos x(\cos^2 x + \sin x)}$ (5)

[30]

VRAAG 6

6.1 Bereken die waarde(s) van x **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, indien $\sin(x - 30°) + 2\cos x = 0; x \epsilon [-150°; 210°]$ en $\cos x \neq 0$. (6)

6.2 Die onderstaande diagram toon die grafiek van $f(x) = -2\cos x$, waar $x \epsilon [-150°; 210°]$.



6.2.1 Skets die grafiek van $g(x) = \sin(x - 30°)$ op dieselfde assestelsel hierbo gegee. Toon duidelik alle afsnitte met die asse sowel as die draaipunte. (4)

6.2.2 Skryf die amplitude van f neer . (1)

6.3 Gebruik jou grafieke om die waarde(s) van x te bepaal, in the interval $x\epsilon[-150°; 210°]$ sodanig dat:

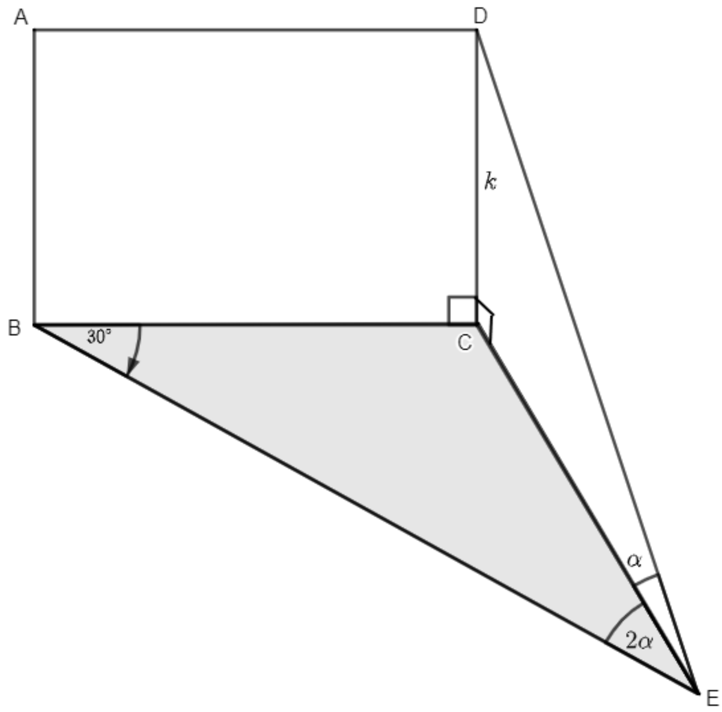
6.3.1 $g(x) - f(x) = 0$. (2)

6.3.2 Dui, met behulp van die simbole A en B, jou antwoord op VRAAG 6.3.1 op die grafiek geteken in VRAAG 6.2.1 aan. (1)

[14]

VRAAG 7

In die diagram lê B, C en E in dieselfde horisontale vlak. ABCD is ’n reghoekige kartonstuk en CDE is ’n driehoekige kartonstuk met ’n regte hoek by C, en $DC = k$. Die kartonstukke word loodreg op die horisontale vlak geplaas soos in die diagram getoon.
Die hoogtehoek van E na D is α. $C\hat{E}B = 2\alpha$ en $E\hat{B}C = 30°$.



7.1 Skryf CE in terme van k en α. (2)

7.2 Bewys dat $BC = 4\,k\,\cos^2 \alpha$. (4)

7.3 Toon aan dat die oppervlakte van $\triangle$BCE gelyk is aan:

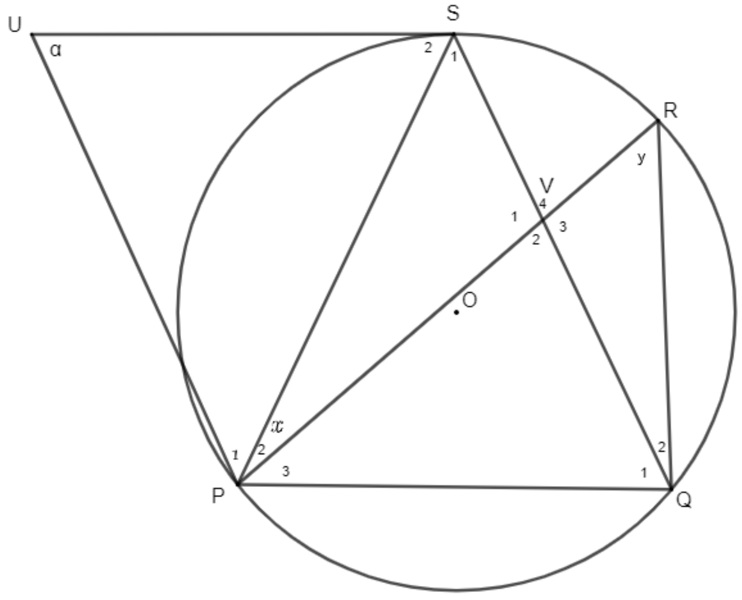
$$\frac{2k^2\cos^3\alpha\,.\,\sin(30^\circ + 2\alpha)}{\sin\alpha} \qquad (3)$$

[9]

VRAAG 8

In die diagram:

- O is die middelpunt van die sirkel.
- Die sirkel gaan deur P, Q, R, en S.
- SQ en PR sny in V.
- SU is 'n raaklyn aan die sirkel by S.
- UP word getrek.
- $\hat{U} = \alpha$.
- $\hat{R} = y$.
- $\hat{P}_2 = x$.
- $\alpha = x + y$.



8.1 Gee, met 'n rede, die grootte van:

8.1.1 $\hat{Q}_2$ (2)

8.1.2 $\hat{S}_1$ (1)

8.2 Bewys dat VSUP 'n koordevierhoek is. (3)

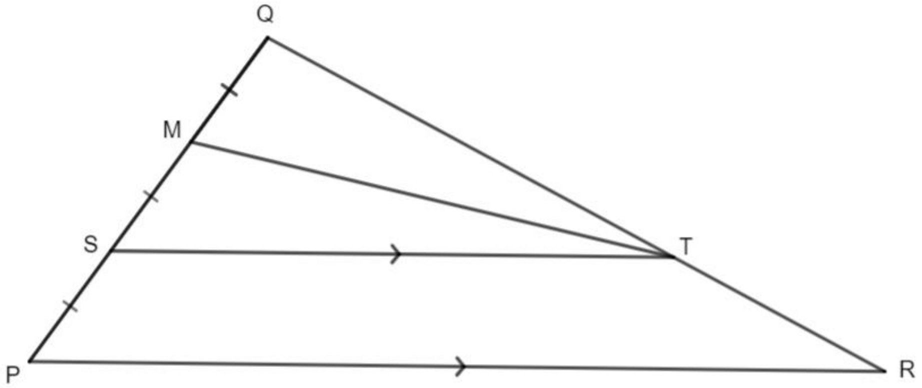
8.3 Indien $PQ = QR$, bewys dat PQ 'n raaklyn aan die sirkel deur V, S, U en P is. (3)

[9]

VRAAG 9

In die diagram word △PQR getrek met S en T punte op PQ en QR onderskeidelik.

- M is ’n punt op QS.
- ST ∥ PR
- PS = SM = MQ



9.1 Stel $SP = k$. Bereken $\frac{TR}{QT}$. (2)

9.2 Bepaal die numeriese waarde van $\frac{Area\ van\ \Delta QMT}{Area\ van\ \Delta QPR}$. (4)

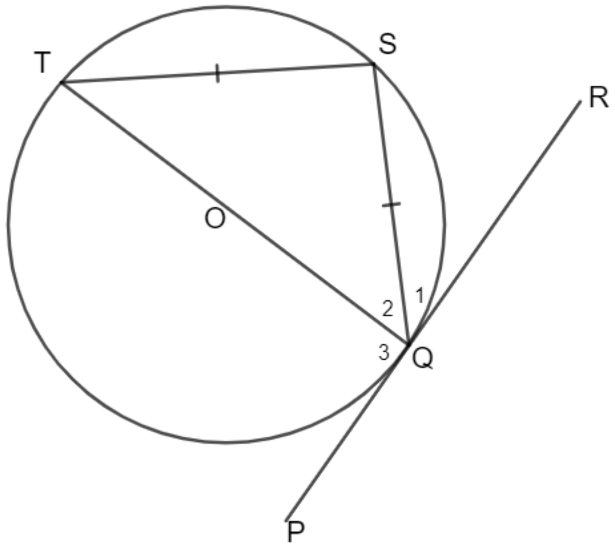
9.3 Indien ST = 22 cm, bepaal die lengte van PR. (4)

[10]

VRAAG 10

In die diagram:

- TOQ is ’n middellyn van die sirkel met middelpunt O.
- T, S en Q lê op die omtrek van die sirkel.
- PR is ’n raaklyn aan die sirkel by Q.
- TS = SQ.

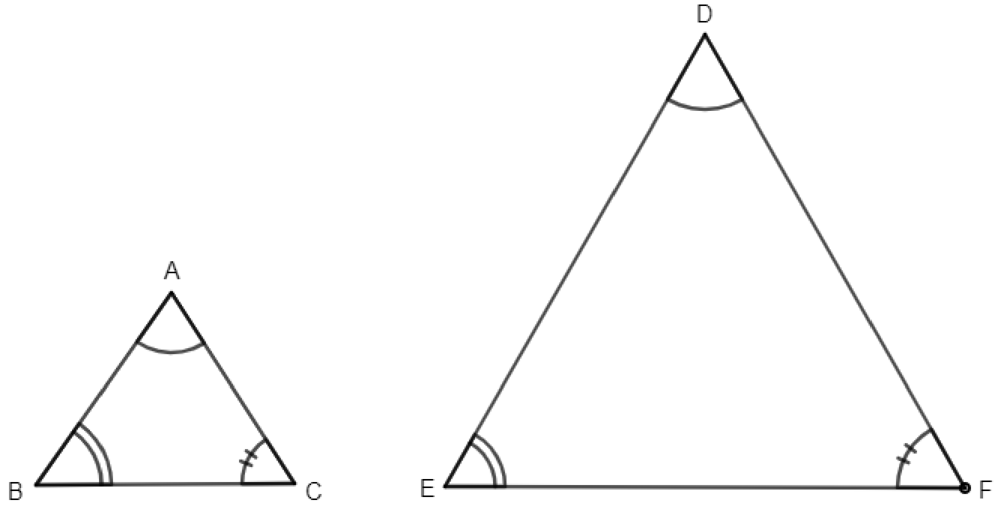


Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{Q}_1$. (4)

[4]

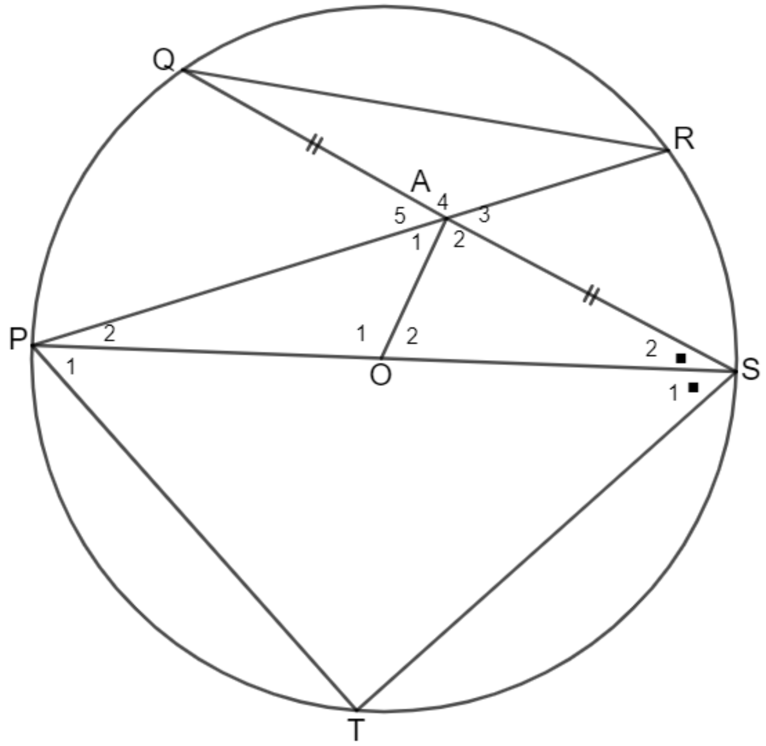
VRAAG 11

11.1 In die diagram word ΔABC en ΔDEF gegee met $\hat{A} = \widehat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ en $\hat{C} = \hat{F}$.
Gebruik die diagram om te bewys dat $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{EF}$. (6)



11.2 In die diagram:

- POS is die middellyn van die sirkel met middelpunt O.
- QAS en PAR is reguit lyne.
- P, Q, R, S en T lê op die omtrek van die sirkel.
- $\mathrm{QA} = \mathrm{AS}$.
- $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$.
- SA verleng ontmoet die sirkel by Q.
- QR, PT en ST word getrek.



11.2.1 Skryf, met 'n rede, die grootte van $\hat{T}$ neer. (2)

____

____

11.2.2 Bewys dat $\triangle PTS \parallel\!| \triangle OAS$. (4)

11.2.3 Bewys dat $TS.OP = QA.PS$ (4)

[16]

GROOTTOTAAL: [150]

BYKOMENDE SKRYFSPASIE

INLIGTINGSBLAD: WISKUNDE

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$A = P(1 + ni)$ $\quad A = P(1 - ni)$ $\quad A = P(1 - i)^n$ $\quad A = P(1 + i)^n$

$T_n = a + (n-1)d$ $\quad S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$T_n = ar^{n-1}$ $\quad S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$; $\quad r \neq 1$ $\quad S_\infty = \frac{a}{1 - r}$; $-1 < r < 1$

$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$ $\quad P = \frac{x\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\quad \mathrm{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$y = mx + c$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad m = \tan\theta$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

In ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ $\quad area\ \Delta ABC = \frac{1}{2}ab.\sin C$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$ $\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ $\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$ $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$ $\quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ $\quad P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$

$\hat{y} = a + bx$ $\quad b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$